

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Волканова Маргарита Дмитриевна

ПОСТРОЕНИЕ УСЕЧЕННЫХ D -ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. П. В. Шпилев

Рецензент:

д. ф.-м. н., профессор В. Б. Мелас

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Computational Stochastics and Statistical Models

Volkanova Margarita Dmitrievna

CONSTRUCTING TRUNCATED D-OPTIMAL DESIGNS FOR TRIGONOMETRIC
REGRESSION MODELS

Graduation Project

Scientific Supervisor:
Candidate of Physics and Mathematics
P. V. Shpilev

Reviewer:
Professor V. B. Melas

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Основные понятия, используемые в теории планирования эксперимента	5
1.1. Критерий оптимальности плана эксперимента	5
1.2. Тригонометрическая модель	7
1.3. Пример применения теоремы 2	7
Глава 2. Построение усеченных D-оптимальных планов	11
2.1. Реализация алгоритма построения усеченных D -оптимальных планов с помощью Maple	11
2.2. Построение D_s -оптимальных планов с равноудаленными точками	12
2.3. Построение D_s -оптимальных планов	15
Глава 3. Сравнение T, D и D_s-оптимальных планов	17
3.1. Задача дискриминации	17
3.2. Эффективность	18
3.2.1. D и D_s -эффективность	18
3.2.2. Эффективность D и D_s -оптимальных планов относительно T -оптимального	19
Заключение	21
Список литературы	22
Приложение А. Реализация в Maple	23

Введение

Тригонометрические модели широко используются для описания периодических явлений в различных областях, таких как медицина, машиностроение и биология. Пример их использования можно найти в работе [7]. Но зачастую известна только структура модели и требуется оценить её параметры, используя экспериментальные данные.

Повысить точность оценок параметров модели можно с помощью подбора условий проведения эксперимента, для этого находятся подходящие для поставленных целей и задач планы. Например, обычные D -оптимальные планы эффективны при оценке всех параметров модели, тогда как зачастую нас интересуют не все параметры, а лишь часть из них. Для этого случая можно использовать усеченные D -оптимальные планы, которые мы рассматриваем в нашей работе.

Усеченные D -оптимальные планы могут также использоваться в задачах дискриминации, когда требуется выбрать одну из нескольких конкурирующих моделей. Альтернативный подход к такой задаче – использование T -оптимальных планов. Этот подход рассматривался в работе [6] для дискриминации тригонометрических моделей. Существенное ограничение связанное с этим подходом, заключается в том, что во многих случаях T -оптимальные планы оказываются вырожденными и не позволяют оценить параметры модели. Невырожденные усеченные планы лишены этого недостатка.

В работах [8] и [5] исследуется задача построения усеченных D -оптимальных планов с помощью канонических моментов. В нашей работе мы рассмотрим другой подход, основанный на использовании теоремы эквивалентности и некоторых предположениях о структуре оптимального плана.

В работе изучаются усеченные D -оптимальные планы для тригонометрических моделей. Была выдвинута гипотеза о том, что для некоторого количества параметров усеченные D -оптимальные планы имеют простую структуру и их можно найти в явном виде.

В данной главе 1 рассматриваются основные определения и теоремы, используемые в теории планирования эксперимента. Приводится описание тригонометрической модели и рассматривается пример, иллюстрирующий построение усеченных D -оптимальных планов на основе теоремы эквивалентности. В главе 2 описывается алгоритм построения усеченных D -оптимальных планов. Рассматривается построение плана для равноудаленных точек и с помощью теоремы Кифера находится явный вид такого плана. Кроме того, проводится исследование D -оптимальных планов для симметричных точек. В главе 3 рассматривается задача дискриминации и способы ее решения: усеченный D -оптимальный критерий сравнивается с T и D -оптимальными критериями, а также вычисляются и анализируются значения их эффективности.

Глава 1

Основные понятия, используемые в теории планирования эксперимента

1.1. Критерий оптимальности плана эксперимента

Рассмотрим набор результатов эксперимента y_1, \dots, y_n . Довольно часто эти результаты могут быть представлены в виде уравнения

$$y_j = \eta(t_j, \theta) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\eta(t, \theta)$ — функция регрессии, известная с точностью до параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ — случайные величины, характеризующие ошибки наблюдений, t_1, \dots, t_n — условия проведения эксперимента (элементы множества планирования χ). Используются следующие допущения (см. [4]): $\mathbb{E}\epsilon_j = 0$ — несмещенность (то есть модель не имеет систематической ошибки), $\mathbb{E}\epsilon_j^2 = \sigma^2$ — равноточность, $\mathbb{E}\epsilon_i\epsilon_j = 0$ при $i \neq j$ — некоррелированность, где $i, j = 1, \dots, n$.

Как правило, целью эксперимента является нахождение оценок параметров или функций от них. На точность полученных оценок влияет как метод оценивания, так и выбор условия проведения экспериментов.

Определение 1. Под *планом эксперимента* будем понимать вероятностную меру ξ с конечным носителем на интервале планирования $[0, 2\pi]$. Мера ξ определяется следующей таблицей:

$$\xi = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}, \quad t_i \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где w_i — веса удовлетворяющие условиям: $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

В теории планирования используется предположение о линейности параметризации: $\eta(t, \theta) = \theta^T f(t)$, где $f(t) = (f_1(t), \dots, f_k(t))^T$, где $f_i(t)$, $i = 0, \dots, k$ — заданные базисные функции.

Определение 2. Информационная нормированная матрица плана — $M(\xi) = \sum_{i=1}^n f(t_i) f(t_i)^T w_i$.

Определение 3. Невырожденные планы — планы, информационная матрица которых невырожденная (то есть $\det M \neq 0$). Дисперсионная матрица невырожденного плана — матрица $D(\xi) = M(\xi)^{-1}$.

Обозначим Ξ — множество всех непрерывных планов для конечного числа точек.

Определение 4. План называется *D-оптимальным*, если он максимизирует величину определителя информационной матрицы $\det M(\xi) \longrightarrow \max_{\xi \in \Xi}$.

Важным инструментом для построения *D-оптимальных* планов является следующая теорема эквивалентности, предложенная в работе [3].

Теорема 1 (Кифер–Вольфовиц, 1961). Если множество информационных матриц компактно, то следующие условия эквивалентны:

- План ξ^* – *D-оптимальный*;
- $\max_{x \in \chi} f^T(x)(M(\xi^*))^{-1}f(x) = k$.

Причем, последнее равенство достигается в опорных точках x_i^* оптимального плана ξ^* . Кроме того, информационные матрицы всех оптимальных планов совпадают.

Разобьем множество параметров θ на два непересекающихся множества θ_1 и θ_2 , где $\dim \theta_2 = s$:

$$\theta^T f(t) = \theta_1^T f_1(t) + \theta_2^T f_2(t).$$

Если имеет место линейное представление функции регрессии, тогда информационная матрица M имеет блочный вид:

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}^T \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix},$$

где $\dim M_{22} = s \times s$, $s \leq k$.

Зададим матрицу $M_s(\xi) = M_{22}(\xi) - X^T(\xi)M_{11}(\xi)X(\xi)$, где $X(\xi) = M_{11}^{-1}(\xi)M_{12}^T(\xi)$ — произвольное решение системы $M_{11}(\xi)X(\xi) = M_{12}^T(\xi)$, причем M_s не зависит от выбора решения. Если матрицы M и M_{11} невырожденные, то $\det M_s(\xi) = \frac{\det M(\xi)}{\det M_{11}(\xi)}$ (см. [3], Замечание 8.2.).

Определение 5. План, максимизирующий величину $\det M_s(\xi)$, называется *усеченным D-оптимальным планом* (D_s -оптимальным).

В работе [3] была доказана теорема эквивалентности для D_s -оптимальных планов.

Теорема 2 (Стадден В., 1976). План ξ^* является усеченным D_s -оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует матрица X , удовлетворяющая следующим условиям:

- $M_{11}(\xi)X = M_{12}(\xi)^T$;
- $\max_{x \in \chi} \psi^T(x)(M_s(\xi))^{-1}\psi(x) = s$, где $\psi(x) = f_{(2)}(x) - X^T f_{(1)}(x)$.

Эту теорему будем использовать для доказательства того, что выбранный план является D_s -оптимальным.

1.2. Тригонометрическая модель

В данной работе в качестве регрессионной функции будем рассматривать многочлен:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_{2j-1} \sin(jt) + \sum_{j=1}^m \beta_{2j} \cos(jt) + \epsilon, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

где β — вектор неизвестных параметров: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m})^T$, $f(t)$ — вектор регрессионных функций: $f(t) = (1, \sin t, \cos t, \dots, \sin(mt), \cos(mt))^T$, m — порядок модели.

1.3. Пример применения теоремы 2

Проиллюстрируем применение теоремы эквивалентности для усеченных D -оптимальных планов на конкретном примере тригонометрической модели третьего порядка.

Вектор регрессионных функций имеет вид:

$$f(x) = (1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x)).$$

Предположим, что оптимальный план имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z \end{pmatrix}.$$

Давайте рассмотрим примеры нахождения планов для оценки двух и трех старших параметров с помощью теоремы эквивалентности для D_s -оптимальных планов.

- Для двух параметров ($s = 2$) оценим старшие коэффициенты при $\sin(3x)$ и $\cos(3x)$:

Найдем информационную матрицу $M(\xi) = \sum_{i=1}^7 f(x_i) f^T(x_i) w_i$, где x_i — точки плана, а w_i — соответствующие веса. Получим матрицу вида:

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - 4z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 4z - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 4z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - 4z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4z - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Помним, что матрица M имеет блочный вид (1.1), тогда подматрицы выглядят следу-

ющим образом:

$$M_{11}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 4z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4z \end{pmatrix},$$

$$M_{12}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - 4z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4z - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X из условия $M_{11}(\xi)X = M_{12}(\xi)^T$, получим

$$X(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - 8z & 0 \\ 0 & 8z - 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $M_s(\xi) = M_{22}(\xi) - X^T(\xi)M_{11}(\xi)X(\xi)$:

$$M_s(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - (1 - 8z)(\frac{1}{2} - 4z) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (8z - 1)(4z - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Хотим подобрать такой план, чтобы $\max_{x \in \chi} \psi^T(x)(M_s(\xi))^{-1}\psi(x) = 2$.

Найдем $\psi(x) = f_{(2)}(x) - X^T f_{(1)}(x)$:

$$f_{(2)}(x) = (\sin(3x), \cos(3x))^T,$$

$$f_{(1)}(x) = (1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x))^T,$$

тогда вектор

$$\psi(x) = (\sin(3t) - (1 - 8z)\sin(t), \cos(3t) - (8z - 1)\cos(t))^T.$$

Максимум экстремального многочлена:

$$\frac{32 \cos(x)^4 z - 4 \cos(x)^4 - 32 \cos(x)^2 z + 4 \cos(x)^2 - 16 z^2 + 8z - 1}{2z(4z - 1)} = 2$$

достигается при $z = \frac{1}{8}$ и, таким образом, план имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

- Для трёх параметров ($s = 3$) будем оценивать старший коэффициент при $\cos(2x)$, $\sin(3x)$ и $\cos(3x)$:

Информационная матрица имеет вид такой же, как и в предыдущем примере, а её подматрицы выглядят следующим образом:

$$M_{11}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 4z \end{pmatrix},$$

$$M_{12}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - 4z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4z - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22}(\xi) = \begin{pmatrix} 4z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X из условия $M_{11}(\xi)X = M_{12}(\xi)^T$, получим

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 8z & 0 \\ 0 & 0 & 8z - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $M_s(\xi) = M_{22}(\xi) - X^T(\xi)M_{11}(\xi)X(\xi)$:

$$M_s(\xi) = \begin{pmatrix} 4z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (1 - 8z)(\frac{1}{2} - 4z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - (8z - 1)(4z - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Помним, что требуется подобрать такой план, чтобы $\max_{x \in \chi} \psi^T(x)(M_s(\xi))^{-1}\psi(x) = 3$. Найдем $\psi(x) = f_{(2)}(x) - X^T f_{(1)}(x)$:

$$f_{(1)}(x) = (1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x))^T,$$

$$f_{(2)}(x) = (\cos(2x), \sin(3x), \cos(3x))^T,$$

тогда

$$\psi(x) = (\cos(2x), \sin(3x) - (1 - 8x)\sin(x), \cos(3x) - (8x - 1)\cos(x))^T.$$

Максимум экстремального многочлена:

$$\frac{\cos(2x)^2}{4z} - \frac{(\sin(3x) - (1 - 8z)\sin(x))^2}{8z(4z - 1)} - \frac{(\cos(3x) - (8z - 1)\cos(x))^2}{8z(4z - 1)} = 3$$

достигается при $z = \frac{3}{20}$ и план имеет вид:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Построение усеченных D -оптимальных планов2.1. Реализация алгоритма построения усеченных D -оптимальных планов с помощью Maple

Как уже говорилось ранее, была выдвинута гипотеза о том, что для некоторых наборов параметров D_s -оптимальные планы имеют простую структуру и их можно найти в явном виде, что является очень сложной задачей. При построении мы имеем много параметров, поэтому возникают сложности, связанные с их вычислением. Для уменьшения расчетов воспользуемся тем, что компоненты вектора регрессионных функций являются тригонометрическими. Другими словами, предполагаем, что план имеет симметричный вид. Симметрию плана будем задавать с помощью точек и параметров. Под симметричной структурой плана будем понимать задание плана с помощью параметров и опорных точек $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ с ограничением на веса ($\sum_{i=1}^N w_i = 1$).

Для численного нахождения усеченного D -оптимального плана был разработан алгоритм для программного пакета Maple с использованием функции `fsolve()`. Его можно разделить на следующие этапы:

- Задание параметров модели;
- Выбор симметричной структуры плана;
- Нахождение плана в численном виде;
- Проверка численного плана по теореме эквивалентности с помощью графика.

На первом шаге задаём параметры регрессионной модели и количество точек плана для ее оценивания. В зависимости от симметричной структуры плана, количество точек необходимо варьировать.

На втором этапе задаём различные симметричные структуры, как с фиктивными точками, так и без них с помощью параметров. Рассматриваем планы с точками носителя симметричными относительно точек $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

На третьем этапе максимизируем определитель матрицы M_s с ограничением на точки и соответствующие веса ($t_i \in [0, 2\pi]$, $w_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, N$) и с помощью функции `fsolve()` находим параметры симметричной структуры плана, при которых численный план является усеченным D -оптимальным. Под численным планом понимаем план с подставленными параметрами симметрии, которые найдены в численном виде.

На четвертом этапе для найденных решений при помощи теоремы эквивалентности строим

график экстремального многочлена с помощью функции $\text{plot}()$ и проверяем, что его глобальный максимум не превышает количества оцениваемых параметров s . Если проверка не была успешной, то возвращаемся ко второму шагу и выбираем другой план с симметричной структурой носителя и большим числом опорных точек.

2.2. Построение D_s -оптимальных планов с равноудаленными точками

На протяжении всей работы будем рассматривать D_s -оптимальный план для оценки старших членов.

В ходе исследования выдвинуто предположение о том, что D_s -оптимальные планы имеют такие же условия проведения, как и у D -оптимального, но веса будут отличаться. Для поиска закономерностей и нахождения общей структуры аналитически рассмотрены симметричные планы с равноудаленными точками.

Таблица 2.1: Общая структура плана с равноудаленными точками и порядок модели, при которых план является D_s -оптимальным.

вид плана	m	s	z, z_1
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi & \frac{4\pi}{3} & \frac{5\pi}{3} \\ z & \frac{1}{3} - z & z & \frac{1}{3} - z & z & \frac{1}{3} - z \end{pmatrix}$	2	2;4	0.167
—//—	1	2	0.167
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi & \frac{4\pi}{3} & \frac{5\pi}{3} \\ \frac{z}{2} & \frac{1-z}{4} & \frac{1-z}{4} & \frac{z}{2} & \frac{1-z}{4} & \frac{1-z}{4} \end{pmatrix}$	2	2;4	0.333
—//—	1	2	0.333
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi & \frac{4\pi}{3} & \frac{5\pi}{3} \\ z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 \end{pmatrix}$	2	2;4	0.167
—//—	1	2	0.167
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z \end{pmatrix}$	3	2;3;4;6	0.125;0.15;0.25
—//—	2	2;4	0.125
—//—	1	2	0.125
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{5} & \frac{2\pi}{5} & \frac{3\pi}{5} & \frac{4\pi}{5} & \pi & \frac{6\pi}{5} & \frac{7\pi}{5} & \frac{8\pi}{5} & \frac{9\pi}{5} \\ z & \frac{1}{5} - z & z & \frac{1}{5} - z & z & \frac{1}{5} - z & z & \frac{1}{5} - z & z & \frac{1}{5} - z \end{pmatrix}$	4	2;4;6;8	0.1
—//—	3	2;4;6	0.1
—//—	2	2;4	0.1
—//—	1	2	0.1
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{5\pi}{6} & \pi & \frac{7\pi}{6} & \frac{4\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{3} & \frac{11\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z \\ z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z & z & \frac{1}{6} - z \end{pmatrix}$	5	2;4;6;8;10	0.083
—//—	4	2;4;6;8	0.083
—//—	3	2;4;6	0.083
—//—	2	2;4	0.083
—//—	1	2	0.083

В таблице 2.1 представлена часть рассмотренных планов, а также условия, при кото-

рых найдутся параметры, такие что численный план будет D_s -оптимальным. По полученным результатам видно, что, в основном, это планы для оценки четного числа параметров ($s = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$). Графики экстремальных многочленов для каждого из случаев представляют собой константы, равные количеству оцениваемых параметров (s), что позволяет легко убедиться в успешности проверки. Кроме того, так как в регрессионной модели мы используем тригонометрические базисные функции, то возникло предположение о востребованности основного тригонометрического тождества.

Случаи, не прошедшие проверку по теореме эквивалентности, в основном имели экстремум на порядок выше необходимого ($s + 1$). Пример такого графика экстремального многочлена (Рис. 2.1) первого плана из таблицы для оценки одного старшего коэффициента представлен ниже. Принимая во внимание все вышеперечисленное можем сделать предположение о существовании закономерности.

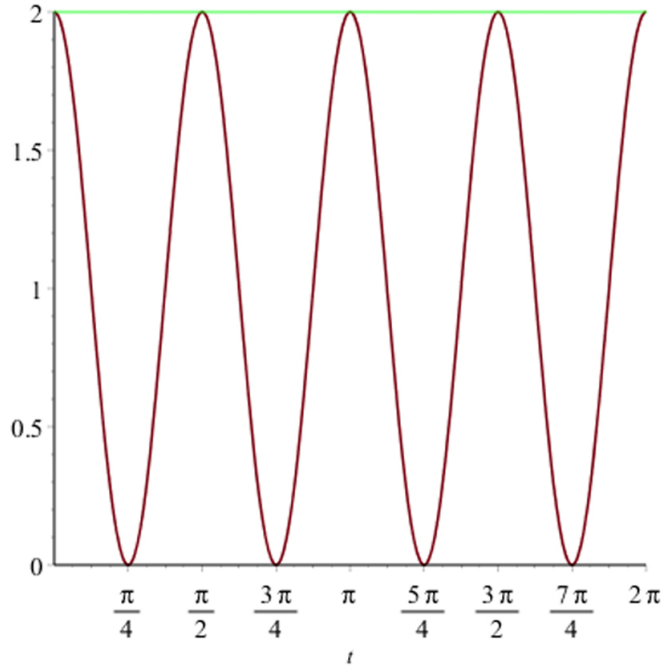


Рис. 2.1. Иллюстрация того, что план не является D_s -оптимальным для случая $N=6$, $m=2$, $s=1$, $z=\frac{1}{6}$.

Также результаты показывают, что некоторые D_s -оптимальные планы совпадают с D -оптимальными с весами $w_i = \frac{1}{N}$, $i = 1, \dots, N$. Например, для $N = 6$: $z = \frac{1}{6}$ и для $N = 8$: $z = \frac{1}{2}$. В связи с этим возникает обратный вопрос: при каком количестве оцениваемых параметров s усеченные D_s -оптимальные планы являются D -оптимальными?

Для ответа воспользуемся теоремой эквивалентности для D -оптимальных планов:

Теорема 3 (Кифер, 1974 г., [1]). Пусть $\chi = [0, 2\pi]$. Непрерывным D -оптимальным планом для тригонометрической регрессионной модели является любой план

$$\xi^* = \begin{pmatrix} t_1^* & \cdots & t_N^* \\ 1/N & \cdots & 1/N \end{pmatrix}, \quad t_i^* = \frac{i-1}{N} 2\pi, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N \geq 2m + 1,$$

где m — порядок регрессионной модели.

Из этой теоремы и определения 2 следует, что информационная матрица имеет следующий вид:

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что мы хотим оценить s старших параметров ($s < 2m + 1$, где m — параметр тригонометрической модели).

Представим матрицу M в блочном виде, где размерности подматриц равны $\dim(M_{22}) = s \times s$, $\dim(M_{12}) = s \times (n - s)$, $\dim(M_{11}) = (n - s) \times (n - s)$:

$$M_{22}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_{12}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{11}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$X(\xi) = M_{11}^{-1}(\xi)M_{12}^T(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем использовать теорему 2 (теорему эквивалентности) для D_s -оптимальных планов.

Так как матрица X нулевая, то $M_s(\xi) = M_{22}(\xi) - X(\xi)^T M_{11}(\xi) X(\xi) = M_{22}(\xi) - X(\xi)^T M_{12}(\xi)^T = M_{22}(\xi)$.

Для экстремального многочлена посчитаем вектор-функцию $\psi(x) = f_{(2)}(x) - X(\xi)^T f_{(1)}(x) = f_{(2)}(x)$.

В силу теоремы эквивалентности для проверки оптимальности усеченного плана ξ достаточно показать, что $d(x, \xi) = \psi(x)^T M_s^{-1}(\xi) \psi(x) = f_{(2)}(x)^T M_{22}^{-1}(\xi) f_{(2)}(x) = s$ и, следовательно,

$$d(x, \xi) = \begin{cases} 2(\sin^2((m - s + 1)x) + \cos^2((m - s + 1)x) + \dots \\ \dots + \sin^2(mx) + \cos^2(mx)) = 2(1 + \dots + 1) = s, & s = 2k, \\ 2(\cos^2((m - s + 1)x) + \dots + \sin^2(mx) + \cos^2(mx)) \neq s, & s = 2k + 1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}^+$. Таким образом, мы можем сформулировать утверждение:

Утверждение 1. Для оценки четного числа старших параметров ($s = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$) усеченным D_s -оптимальным планом для тригонометрической регрессионной модели является любой план следующего вида

$$\xi^* = \begin{pmatrix} t_1^* & \dots & t_N^* \\ 1/N & \dots & 1/N \end{pmatrix}, \quad t_i^* = \frac{i-1}{N} 2\pi, \quad i = 1, \dots, N, \quad N \geq 2m+1,$$

где m — порядок регрессионной модели.

2.3. Построение D_s -оптимальных планов

Рассмотрим более общий случай, когда точки плана симметричные, но не обязательно равноудаленные. Другими словами, расширим область рассмотрения планов для того, чтобы найти усеченный D_s -оптимальный план для нечетного числа оцениваемых параметров. Для нахождения параметров симметричной структуры плана, при которых численный план является D_s -оптимальным, также используется алгоритм, основанный на теореме эквивалентности и реализованный с помощью функции `fsolve` пакета Maple.

По результатам, представленным в таблице 2.2, видно, что необходимые планы для оценки нечетного количества параметров были найдены. К сожалению, это не дает четкого представления о явном виде планов, так как закономерность или связь между численными представлениями полученных планов не наблюдается.

Таблица 2.2: Общая структура плана и порядок модели, при которых план является D_s -оптимальным.

Вид плана	m	s	p	z	z_1
$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{3} - z & z & \frac{1}{3} - z & z & \frac{1}{3} - z \end{pmatrix}$	2	2;3;4	2.094 0.617	0.167 0.708	
—//—	1	2	2.094	0.167	
$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}$	2	2;3;4	1.047 0.991	0.167 0.214	
—//—	1	2	1.047	0.167	
$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 \end{pmatrix}$	2	2;3;4	0.991 2.094	0.214 0.167	0.143 0.167
—//—	1	2	2.094	0.167	0.167
$\begin{pmatrix} 0 & p & \frac{\pi}{2} & \pi - p & \pi & \pi + p & \frac{3\pi}{2} & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z \end{pmatrix}$	3	2;3;4;5;6	0.785 2.356 2,394	0,125 0.15 0.124	
—//—	2	2;3;4	0.785 2.356	0,125 0.15	
—//—	1	2	0.785	0,125	
$\begin{pmatrix} 0 & p & \frac{\pi}{2} & \pi - p & \pi & \pi + p & \frac{3\pi}{2} & 2\pi - p \\ z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z_1 & z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z_1 \end{pmatrix}$	3	2;3;4;5;6	0.785 2.356 2,394	0,125 0.15 0.124	0,125 0.1 0.126
—//—	2	2;3;4	0.785 2.356	0.15 0,125	0.1 0,125
—//—	1	2	0.785	0,125	0,125

Выделим отдельно случай для $s = 1$. Заметим, что чем меньше параметров регрессионной модели оцениваем, тем меньше может быть размерность плана, что мы и наблюдаем в следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим тригонометрическую регрессионную модель второго порядка и симметричный план вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся определением D_s -оптимальности (5) и найдем параметры симметрии. Для этого максимизируем определитель матрицы M_s (1.1) и получим, что при $p = \frac{\pi}{2}$ и $z = \frac{1}{4}$ план имеет следующий численный вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что план вырожденный и сосредоточен в четырех точках: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Теперь проверим план на D_s -оптимальность по теореме эквивалентности (2).

Экстремальный многочлен будет равен $\cos(2x)^2$. Помним, что его максимум должен равняться количеству оцениваемых параметров s , то есть единице. Для наглядности приведем график.

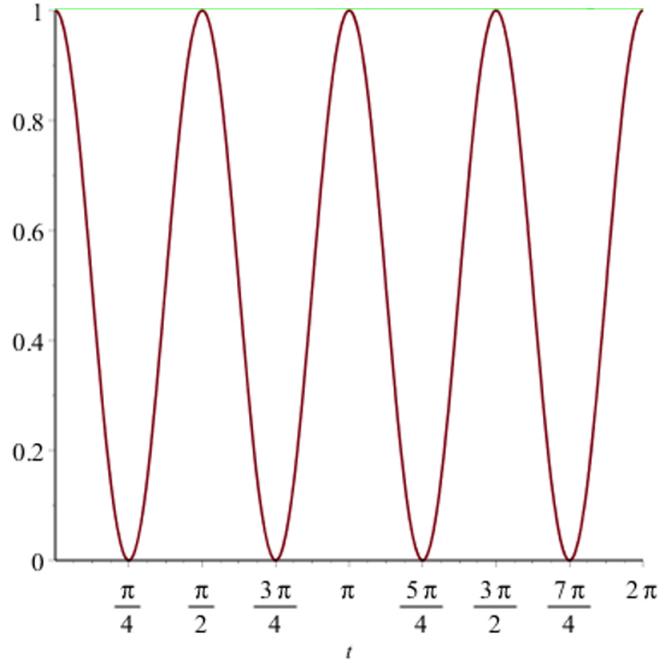


Рис. 2.2. Иллюстрация проверки плана на D_s -оптимальность по теореме эквивалентности для случая $N=6, m=2, s=1$.

Глава 3

Сравнение T , D и D_s -оптимальных планов

Одна из задач, которую мы можем решать с помощью D_s -оптимальных планов — это задача дискриминации. Также ее решают с помощью D и T -оптимальных [6], поэтому важно определить, какой из методов эффективнее.

3.1. Задача дискриминации

Опишем задачу дискриминации регрессионных моделей следующим образом. Пусть имеются конкурирующие регрессионные модели:

$$\eta_1(x, \theta_1) = \tilde{q}_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{q}_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=1}^{k_2} \tilde{q}_{2i} \cos(ix),$$

$$\eta_2(x, \theta_1) = \bar{q}_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \bar{q}_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=1}^{k_2} \bar{q}_{2i} \cos(ix) + \sum_{i=k_1+1}^m b_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=k_2+1}^m b_{2i} \cos(ix),$$

где

$$\theta_1 = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{2k_2}, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{2k_1-1}),$$

$$\theta_2 = (\bar{q}_0, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{2k_2}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{2k_1-1}, b_2, \dots, b_{2m}, b_1, \dots, b_{2m-1})$$

— векторы параметров моделей η_1 и η_2 соответственно.

Важно так спланировать эксперимент, чтобы по его результатам можно было бы максимально точно определить, какая из моделей лучше аппроксимирует экспериментальные данные.

Для этого надо оценить параметры “старшей” модели. Важно уменьшить количество измерений, то есть увеличить эффективность. Поднимается вопрос: можем ли мы без потери общности заменить модель, т.е. избавиться от старших порядков, чтобы проводить меньше вычислений?

Решить задачу дискриминации можно несколькими способами. Давайте рассмотрим плюсы и минусы некоторых из них:

- Используя T -оптимальные планы:

Определение 6. Рассмотрим две конкурирующие модели $\eta_1(x, \theta_1)$ и $\eta_2(x, \theta_2)$, которые нужно дискриминировать. Под T -оптимальным планом будем понимать план, максимизирующий величину отклонения второй модели от первой:

$$\xi^* = \operatorname{argmax}_{\xi} \int_{\chi} (\eta_1(x, \theta_1) - \eta_2(x, \hat{\theta}_2))^2 \xi(dx),$$

где параметр $\hat{\theta}_2$ минимизирует выражение

$$\hat{\theta}_2 = \operatorname{argmin}_{\theta_2} \int_{\chi} (\eta_1(x, \theta_1) - \eta_2(x, \theta_2))^2 \xi(dx).$$

Построение T -оптимальных планов хорошо дает понять, можно ли использовать “младшую” модель, но в дальнейшем требуется построение D -оптимального плана для оценки параметров;

- Используя D_s -оптимальные планы: Хуже отвечает на вопрос эффективности, но (если план не вырожден) позволяет сразу оценить параметры вложенной модели;
- Используя D -оптимальные планы: Самый универсальный — может оценить все параметры, но не дает точный ответ на вопрос.

Далее планируется сравнить эти методы, а именно, понять сколько потребовалось сделать исследований каждому методу, чтобы достигнуть конкретной точности.

3.2. Эффективность

Чтобы сравнить методы, введем понятие эффективности:

Определение 7. Эффективность плана ξ_1 относительно ξ_2 — это величина, которая показывает, во сколько раз нужно увеличить число экспериментов, если оценивать параметры, оптимально оцениваемые планом ξ_1 , с помощью плана ξ_2 .

3.2.1. D и D_s -эффективность

Если было проведено k экспериментов, то информационная матрица имеет вид: $M = k \cdot M(\xi)$, где k — количество оцениваемых параметров. Из линейной алгебры известно, что если матрица $M \in R^{(2m+1) \times (2m+1)}$, тогда $\det k \cdot M = k^{2m+1} \det M$, где $k = \text{const}$.

Тогда можем определить эффективность D -оптимального плана, относительно D_s -оптимального плана по след формуле:

$$\frac{\sqrt[s]{\det M_s(\xi_2)}}{\sqrt[s]{\det M_s(\xi_1)}},$$

где s — количество оцениваемых параметров модели, ξ_2 — D -оптимальный план и ξ_1 — D_s -оптимальный план.

Эффективность D_s -оптимального плана, относительно D -оптимального:

$$\frac{\sqrt[n]{\det M(\xi_1)}}{\sqrt[n]{\det M(\xi_2)}},$$

где n — количество параметров модели, ξ_2 — D -оптимальный план и ξ_1 — D_s -оптимальный план.

По предложенным видам оптимальных планов видно, что эффективность D_s -оптимальных планов по отношению к D -оптимальным планам в большинстве случаев велика (таблица 3.1). Это означает, что если применять усеченные D_s -оптимальные планы для оценки всех параметров, то нет необходимости сильно увеличивать число экспериментов.

Таблица 3.1: Эффективность D -оптимального плана относительно D_s -оптимальных для тригонометрической модели порядка m .

планы	m=2	m=3
D_2 относительно D	1	1
D_3 относительно D	0.9758043275	0.9826570112
D_4 относительно D	1	1
D_5 относительно D	—	0.9772176614
D_6 относительно D	—	1

3.2.2. Эффективность D и D_s -оптимальных планов относительно T -оптимального

Введем обозначение разности $\eta_2(x, \theta_2) - \eta_1(x, \theta_1)$:

$$\bar{\eta}(x, q, \bar{b}) = q_0 + \sum_{i=1}^{k_1} q_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=1}^{k_2} q_{2i} \cos(ix) + \sum_{i=k_1+1}^m b_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=k_2+1}^m b_{2i} \cos(ix),$$

где $q = (q_0, q_1, \dots, q_{2k_1-1}, q_2, \dots, q_{2k_2})^T$, $q_i = \bar{q}_i - \tilde{q}_i$ и $\bar{b} = (b_1, b_3, \dots, b_{2(m-k_1)-1}, b_2, \dots, b_{2(m-k_2)})^T$. Теперь критерий T -оптимальности можно записать в следующем виде:

$$T(\xi, \bar{b}) = \min_q \int_0^{2\pi} \bar{\eta}^2(x, q, \bar{b}) \xi(dx).$$

Тогда T -оптимальный план максимизирует $T(\xi, \bar{b})$:

$$\xi^* = \operatorname{argmax}_{\xi} T(\xi, \bar{b}).$$

Эффективность плана ξ показывает, насколько произвольный план ξ хуже T -оптимального плана при фиксированном θ :

$$\frac{T(\xi, \bar{b})}{T(\xi^*, \bar{b})},$$

где ξ — D или D_s -оптимальный план, ξ^* — T -оптимальный план. Эта формула является модификацией формулы эффективности из работы [2].

Также приведем графики, которые демонстрируют эффективность модели при фиксированных параметрах $b_0 = 1$, $b_2 = 0, 0.5, 1, 2, 3, 5$ относительно параметра b_1 , заданного на промежутке $[0, 5]$:

- Эффективность для оценки трёх старших членов ($\dim \bar{b} = 3$), который был построен относительно усеченного D_3 -оптимального плана:

$$\xi_{D_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

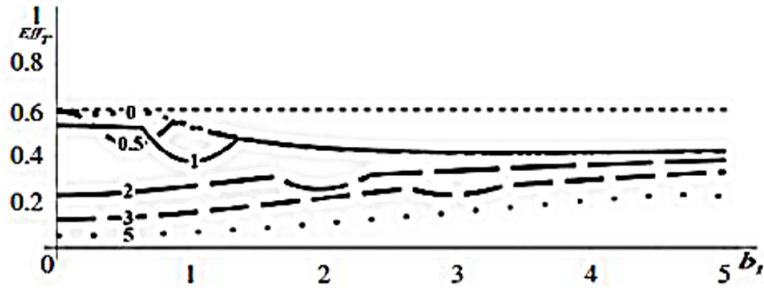


Рис. 3.1. D_3 -оптимальный план для модели, где $m = 3$; $b_2 = 0, 0.5, 1, 2, 3, 5$; $b_1 \in [0, 5]$; $b_0 = 1$.

- Эффективность относительно D -оптимального плана:

$$\xi_D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

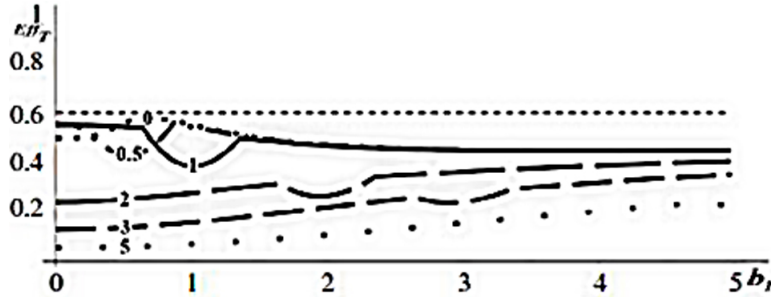


Рис. 3.2. D -оптимальный план для модели, где $m = 3$; $b_2 = 0, 0.5, 1, 2, 3, 5$; $b_1 \in [0, 5]$; $b_0 = 1$.

Горизонтальная пунктирная линия показывает верхнюю границу для эффективности, и по обоим графикам видно, что она не превышает 60%.

Заметим, что D_s планы либо совпадают с D -оптимальными, либо очень близки к ним. Поэтому их эффективность по отношению к T -оптимальным планам практически совпадает с такой же эффективностью для D -оптимальных планов. Чтобы проиллюстрировать это, мы включили соответствующий график из работы [6] (см. Рис. 3.2).

Заключение

В данной работе изучены имеющиеся результаты для T -оптимальных планов ([6]) и для усеченных D -оптимальных планов ([8]) для тригонометрических моделей.

Приведены и аналитически построены симметричные планы. Таким образом, в работе получены следующие результаты:

- Доказано, что D -оптимальные планы являются усеченными D -оптимальными (D_s -оптимальными) для общей тригонометрической модели с четным количеством оцениваемых старших коэффициентов;
- Для нечетных s для нескольких конкретных моделей малого порядка (перечисленных в таблице 2.2) численно построены D_s -оптимальные планы. Это сделано следующим образом. Предполагается, что планы имеют простую симметричную структуру, зависящую от одного, двух или трех параметров. Разработана программа в пакете Maple, позволяющая численно найти оптимальные значения этих параметров. По теореме эквивалентности проверяется, что планы с такими значениями параметров являются D_s -оптимальными;
- Проведено численное сравнение эффективности полученных планов с T -оптимальными планами, известными из опубликованных работ.

На основании результатов, полученных в данной работе, сделан вывод, что усеченные D -оптимальные планы не имеют преимущества относительно D -оптимальных для рассмотренных нами тригонометрических моделей.

Список литературы

1. Мелас В., Шпилев П. Планирование и анализ для регрессионных моделей. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет, 2012. — 102 с.
2. Гученко Р., Мелас В. Т-оптимальные планы для дискриминации дробно-рациональных и полиномиальных моделей // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2017. — Т. 62. — С. 208–219.
3. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — Москва : Наука, 1976. — 540 с.
4. Ермаков С., Жиглявский А. Математическая теория оптимального эксперимента. — Москва : Наука, 1987. — 82 с.
5. Biedermann S., Dette H., Hoffmann P. Constrained optimal discrimination designs for Fourier regression models // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 2009. — Vol. 61. — P. 143–157.
6. Dette H., Melas V., Shpilev P. T-optimal discriminating designs for Fourier regression models // Computational Statistics and Data Analysis. — 2017. — Vol. 113. — P. 196–206.
7. Lestrel P. Fourier Descriptors and Their Applications in Biology. — Los Angeles : Cambridge University Press, 2008.
8. Zhang C. Optimal designs for trigonometric regression // Communications in Statistics - Theory and Methods. — 2007. — Vol. 36. — P. 755–766.

Приложение А

Реализация в Maple

```
# Нахождение плана в численном виде
with(linalg):
m:=3;
Sd:=2;
F :=t-> vector(2*m+1,i -> 'if'(type(i,even),sin(i/2*t),cos((i-1)/2*t)) );
FT :=t-> transpose(F(t));
multiply(FT(t),F(t));
plot([multiply(FT(t),F(t))],t=-Pi..Pi);
with(linalg): mt:=multiply(F(t),FT(t));

NumX:=1; NumZ:=1; DesignDopt := {t[1] = 0, t[2] = x[1], t[3] = Pi-x[1],
t[4] = Pi, t[5] = Pi+x[1], t[6] = 2*Pi-x[1], w[1] = z[1],
w[2] = (1/4-z[1]/2), w[3] = (1/4-z[1]/2), w[4] = z[1], w[5] = (1/4-z[1]/2),
w[6] = (1/4-z[1]/2)};

NumX:=1; NumZ:=1; DesignDopt := {t[1] = 0, t[2] = x[1], t[3] = (1/2)*Pi,
t[4] = Pi-x[1], t[5] = Pi, t[6] = Pi+x[1], t[7] = (3/2)*Pi,
t[8] = 2*Pi-x[1], w[1] = z[1]/4, w[2] = (1-z[1])/4, w[3] = z[1]/4,
w[4] = (1-z[1])/4, w[5] = z[1]/4, w[6] = (1-z[1])/4, w[7] = z[1]/4,
w[8] = (1-z[1])/4};

NumX:=1; NumZ:=2; DesignDopt := {t[1] = 0, t[2] = x[1], t[3] = (1/2)*Pi,
t[4] = Pi-x[1], t[5] = Pi, t[6] = Pi+x[1], t[7] = (3/2)*Pi,
t[8] = 2*Pi-x[1], w[1] = z[1]/8, w[2] = (z[2])/8, w[3] = (1-z[1]-z[2])/8,
w[4] = (z[2])/8, w[5] = z[1]/8, w[6] = (z[2])/8, w[7] = (1-z[1]-z[2])/8,
w[8] = (z[2])/8};

eval(add(w[k],k=1..8),DesignDopt);
DesignDopt := eval(DesignDopt,solution);

with(linalg):

M0:=matrix(2*m+1,2*m+1,(i,j)->combine(factor(expand(eval(sum( F(t[k])[i]*
F(t[k])[j]*w[k],k=1..n1), DesignDopt)))));
```

```
M11:=matrix(2*m+1-Sd,2*m+1-Sd,(i,j)->
combine(factor(expand(eval(sum( F(t[k])[i]*F(t[k])[j]*w[k],
k=1..n1),DesignDopt)))));
```

```
M12:=matrix(Sd,2*m+1-Sd,(i,j)->
combine(factor(expand(eval(sum( F(t[k])[2*m+1-Sd+i]*F(t[k])[j]*w[k],
k=1..n1),DesignDopt)))));
```

```
M21:=transpose(M12);
```

```
M22:=matrix(Sd,Sd,(i,j)->combine(factor(expand(eval(sum( F(t[k])[2*m+1-Sd+i]*
F(t[k])[2*m+1-Sd+j]*w[k], k=1..n1),DesignDopt)))));
```

```
with(linalg):
```

```
X:=multiply(inverse(M11),M21): XM:=multiply(transpose(X),M21);
Ms:=matrix(Sd,Sd,(i,j)->M22[i,j]-XM[i,j]);
F2:=t-> vector(Sd, (i)->'if'(type(2*m+1-Sd+i,even),sin((2*m+1-Sd+i)/2*t),
cos((2*m-Sd+i)/2*t)) );
F1:=t-> vector(2*m+1-Sd, (i)->'if'(type(i,even),sin(i/2*t),cos((i-1)/2*t)) );
XTF1:=t->multiply(transpose(X),F1(t));
Ksi0:=t->vector(Sd, (i)->F2(t)[i]-XTF1(t)[i]);
Ksi:=t->multiply(multiply(transpose(Ksi0(t)), inverse(Ms)),Ksi0(t));
```

```
plot([Ksi(t)],t=0..2*Pi);
```

```
solution:=solve({seq(diff(det(Ms),x[i])=0,i=1..NumX),seq(diff(det(Ms),z[i])=0,
i=1..NumZ)});
```

```
solution:=fsolve({seq(diff(det(Ms),x[i])=0,i=1..NumX),seq(diff(det(Ms),z[i])=0,
i=1..NumZ)},{seq(x[i]=0..2*Pi,i=1..NumX),seq(z[i]=0..1,i=1..NumZ)});
```

```
initialpoint1:=initialpoint=[x[1]=0,z[1]=z[2]=] solution:=Search(-abs(det(Ms)),
constr, initialpoint1);
```

```
evalf(det(Ms));
```